Concours Centrale - Supélec 1996

Épreuve : MATHÉMATIQUES I — Option M, P'

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{L}$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}$ formé des fonctions lipschitziennes, c'est-à-dire des fonctions φ pour lesquelles existe une constante $K_\varphi \geq 0$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K_\varphi |x - y| .$$

On a pour but, dans ce problème, de rechercher les fonctions $F \in \mathcal{L}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F(x) - \lambda F(x + a) = f(x), \tag{1}$$

où f est une fonction de $\mathcal{L}$ donnée et où a et λ sont deux réels non nuls donnés.

Les parties III et IV sont largement indépendantes.

Partie I - Question préliminaire

Soit $F \in \mathcal{F}$ vérifiant (1). Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$F(x) = \lambda^n F(x + na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x + ka) \tag{2}$$

$$F(x) = \lambda^{-n} F(x - na) - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} f(x - ka) . \tag{3}$$

Partie II - Quelques propriétés des fonctions lipschitziennes

II.1) Montrer que $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel réel de $\mathcal{F}$.

II.2) Soit $f \in \mathcal{F}$ dérivable. Montrer que pour que $f \in \mathcal{L}$, il faut et il suffit que sa dérivée f' soit bornée.

II.3) f et g étant deux fonctions bornées de $\mathcal{L}$, montrer que leur produit $f \cdot g$ est aussi une fonction de $\mathcal{L}$. En est-il de même si f et g ne sont pas toutes deux bornées ?

II.4) Soit $f \in \mathcal{L}$. Montrer l'existence de deux réels positifs A et B tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ |f(x)| \leq A|x| + B . \tag{4}$$

II.5) Soit $f \in \mathcal{F}$. On suppose qu'existe un réel positif M tel que, pour tous x et y réels vérifiant $0 \leq x - y \leq 1$, on a $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. Démontrer que $f \in \mathcal{L}$.

Partie III - Étude de (1) pour $|\lambda| \neq 1$

III.A - On suppose dans cette sous-partie que $|\lambda| < 1$.

III.A.1)

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na)$ est absolument convergente (on pourra utiliser la Question II.4).

b) En déduire qu'il existe une, et une seule, fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1) et que F est donnée par

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na) .$$

III.A.2) Étude de trois cas particuliers

a) On suppose que f est la fonction f_1 définie par $f_1(x) = 1$. Montrer que $f_1 \in \mathcal{L}$ et déterminer la fonction F_1 correspondante.

b) On suppose que f est la fonction f_2 définie par $f_2(x) = \cos x$. Montrer que $f_2 \in \mathcal{L}$ et que la fonction correspondante F_2 est donnée par

$$F_2(x) = \frac{\cos x - \lambda \cos(x - a)}{1 - 2\lambda \cos a + \lambda^2} . \tag{5}$$

c) On suppose que f est la fonction f_3 définie par $f_3(x) = \sin x$. Montrer que $f_3 \in \mathcal{L}$ et déterminer la fonction F_3 correspondante.

III.B - On suppose dans cette sous-partie que $|\lambda| > 1$.

III.B.1)

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{n} f(x+na)$ est absolument convergente.

b) En déduire qu'il existe une, et une seule, fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1) et que F est donnée par

$$F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{n} f(x-na).$$

III.B.2) Dans chacun des trois cas particuliers suivants, déterminer la fonction F_i correspondante.

a) f est la fonction f_1 définie par $f_1(x) = 1$,

b) f est la fonction f_2 définie par $f_2(x) = \cos x$,

c) f est la fonction f_3 définie par $f_3(x) = \sin x$.

Partie IV - Étude de (1) pour $|\lambda| = 1$

IV.A - On suppose dans cette sous-partie que $\lambda = 1$.

IV.A.1) Montrer que pour qu'existe une fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1), il faut que f soit bornée.

IV.A.2)

a) Montrer, en en explicitant une, qu'il existe des fonctions $F \in \mathcal{L}$ non nulles vérifiant

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) - F(x+a) = 0$.

b) Soit $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1). F est-elle unique ?

IV.A.3) On suppose dans cette question que f est la fonction définie par $f(x) = \cos x$.

a) Si $\cos a \neq 1$, montrer qu'en faisant tendre λ vers 1 dans la fonction F_2 donnée par (5), on obtient une fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1).

b) Si $a = 2\pi$, établir qu'il n'existe aucune fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1).

IV.B - On suppose dans cette sous-partie que $\lambda = -1$.

IV.B.1)

a) Montrer, en en explicitant une, qu'il existe des fonctions $F \in \mathcal{L}$ non nulles vérifiant

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) + F(x+a) = 0$.

b) Soit $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1), F est-elle unique ?

IV.B.2) On suppose dans cette question que f est la fonction définie par $f(x) = \cos x$.

a) Si $\cos a \neq -1$, expliciter une fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1).

b) Si $a = \pi$, établir qu'il n'existe aucune fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1).

IV.B.3) On suppose dans cette question que $a = 1$ et que $f \in \mathcal{L}$ est décroissante, de limite nulle en $+\infty$ et à dérivée f' croissante.

a) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n} f(x+n)$ converge.

b) Montrer qu'il existe une, et une seule, fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1) et telle que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$ (pour établir que $F \in \mathcal{L}$, on pourra utiliser la Question II.5).

••• FIN •••